

Sigmapunkt-Kalmanfilter zur kombinierten Zustands- und Parameterschätzung

Sigma-Point Kalman Filters for Combined State and Parameter Estimation

Dipl.-Ing. **J. Fox**; Prof. Dr.-Ing. habil. **H. Janocha**, Saarbrücken

Kurzfassung

Kalmanfilter werden seit langem zur Zustands- und Parameterschätzung nichtlinearer dynamischer Systeme mit stochastischen Eingängen verwendet. In den vergangenen Jahren sind jedoch neue Ansätze, sog. Sigmapunkt-Kalmanfilter (SPKF), entstanden, die zum einen eine höhere Schätzgenauigkeit aufweisen und zum anderen keine analytische Berechnung der Ableitungen der Systemfunktion erfordern. Letzteres prädestiniert die SPKF für den Einsatz als Black-Box-Schätzer. In diesem Beitrag wird die Methodik der SPKF vorgestellt und zunächst an einem einfachen Beispiel, der Navigation eines Segelschiffes mit Messmitteln, wie sie zu den Zeiten von Columbus verfügbar waren, anschaulich gemacht. Die Vorteile und das Anwendungspotenzial der SPKF werden dann mit einem Abriss der Forschungsarbeiten am Lehrstuhl für Prozessautomatisierung der Universität des Saarlandes und Literaturstellen belegt.

Abstract

Since long, Kalman filters are used for state and parameter estimation of nonlinear dynamical systems with stochastic inputs. In recent years, however, so-called sigma-point Kalman filters (SPKF) have emerged. They feature a higher estimation accuracy and lack the need for analytical derivatives of the system function. The latter makes them attractive for black-box estimation methods. In this paper, the SPKF theory is presented. The navigation of a sailing ship with sensors that could have been used by Columbus serves as an example for the advantageous application of these filters. Potential applications of SPKFs are illustrated then with ongoing research projects of the Laboratory of Process Automation (Saarland University) and citations.

1. Einleitung

Als Columbus 1492 aufbrach, um den Westweg nach Indien zu finden, wurde es die weiteste Reise über das offene Meer, die je ein Mensch gewagt hatte. Eine der wichtigsten Aufgaben, die ihm als Admiral der kleinen Flotte zukam, war die Navigation, d.h. die Bestimmung seiner Position (ausgedrückt in Längen- und Breitengrad) auf der Erdoberfläche. Dazu konnte er auf verschiedene Messgeräte zurückgreifen: Einen Kompass zur Bestimmung des Kurses, eine Holzlogge zur Bestimmung der Geschwindigkeit gegenüber der Wasseroberfläche sowie einen

Jakobsstab (oder ähnliche Geräte) zur Bestimmung des Breitengrades anhand der Sterne (siehe Bild 3). Jedoch war keine dieser Messungen sonderlich exakt und so ist es aus heutiger Sicht bewundernswert, dass Columbus auf seinen vier Reisen zielgenau die selben Inseln, Buchten und Landstriche wieder fand, die er zuvor entdeckt hatte [1].

In diesem Beitrag soll zunächst anhand des Beispiels der Navigation mit früher gebräuchlichen Messmitteln gezeigt werden, wie sich mit modernen mathematischen Verfahren Zustände (Längengrad und Breitengrad) und Parameter (Offset des Kompass) des zugrunde liegenden Systems schätzen lassen. Das "Columbusproblem" wird dazu als zeitdiskretes nichtlineares System mit stochastischen Störungen (Messfehlern) modelliert:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{n}_k^s), \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) + \mathbf{n}_k^m \quad (1)$$

Hierin beschreiben \mathbf{x} den Zustandsvektor, \mathbf{u} den Eingang, \mathbf{y} den Ausgang, \mathbf{n}^s das Systemrauschen und \mathbf{n}^m das Messrauschen. k ist der diskrete Zeitindex, \mathbf{f} und \mathbf{h} sind die System- bzw. Messfunktion. Gesucht ist eine möglichst genaue Schätzung des Zustandes \mathbf{x}_k bei Kenntnis der Eingänge und Messungen bis zum Zeitpunkt k sowie stochastischer Kennwerte (Mittelwerte, Varianzen) der Rauschterme. Ein geeignetes Online-Verfahren zur Zustandsschätzung ist das erweiterte Kalmanfilter (EKF) [5]. Es ist in vielen Bereichen seit langer Zeit Stand der Technik und wird beispielsweise zum Training neuronaler Netze in der Sprachsignalverarbeitung [7], zur Objektverfolgung in militärischen (Abfangraketen) [8] und zivilen Anwendungen (Verkehrsbeobachtung mit Bildverarbeitung [4]) oder zur Zustandsschätzung von Roboterarmen eingesetzt [9]. In diesem Beitrag soll nun eine neuere Variante des EKF, das sog. Sigmapunkt-Kalmanfilter (SPKF) vorgestellt werden, das gegenüber dem EKF eine Reihe von Vorteilen hat (siehe Abschnitt 2). In Abschnitt 3 werden Simulationsergebnisse beim Einsatz eines SPKF zur Zustands- und Parameterschätzung am oben beschriebenen "Columbusproblem" präsentiert. Abschnitt 4 gibt einen Überblick über ein aktuelles Forschungsprojekt, bei dem SPKF zur Parameterschätzung einer inertialen Messeinheit eingesetzt werden. Der Beitrag schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

2. Sigmapunkt-Kalmanfilter

Trotz seiner weiten Verbreitung gilt der Kalmanfilterentwurf als schwierig, da bei nichtlinearen Systemen die partiellen Ableitungen der Systemgleichungen berechnet werden müssen und die Konvergenz des Schätzfilters nur schwer zu beweisen ist. Daher wurden in den vergangenen Jahren verschiedene Anstrengungen unternommen, Alternativen zum EKF zu entwickeln, die einfacher zu entwerfen sind und möglichst noch genauere Schätzergebnisse liefern.

Die wohl erste dieser Entwicklungen geht auf Julier und Uhlmann zurück, die eine sog. *unscented transformation* (UT) zur Approximation von Mittelwert und Varianz einer stochastischen Variablen nach einer nichtlinearen Transformation entwarfen (eine Übersicht über

die von den Autoren auf dieser Grundlage erzielten Forschungsergebnisse gibt [6]). Dazu wählt die UT repräsentativ $2n+1$ Punkte im Zustandsraum aus (n : Systemordnung), die der Transformation unterworfen werden. Aus den transformierten Punkten werden dann ein gewichteter Mittelwert und eine gewichtete Varianz berechnet. Diese Transformation kann in einen Algorithmus zur sequentiellen Zustandsschätzung eingebunden werden und wird dann als *unscented Kalman filter* (UKF) bezeichnet. v. d. Merwe [7] hat verschiedene Varianten dieser Herangehensweise unter dem Begriff *Sigmapunktfiter* (SPKF) gebündelt. Die mathematische Grundstruktur der SPKF kann durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden (Implementierungsdetails, wie beispielsweise eine schnelle Wurzelformulierung der Komplexität $\mathcal{O}(n^3)$ und die verwendeten Gewichte, lassen sich aus [7] entnehmen). Hierbei wurde angenommen, dass der Zustand \mathbf{x} im Vergleich zu (1) um das Systemrauschen \mathbf{n}^s erweitert wurde.

Prädiktion	Update	Sigmapunkte
	$\mathbf{y}_{i,k} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_{i,k}^-, \mathbf{u}_k) \quad \hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=0}^{2n} w_i^m \mathbf{y}_{i,k}$	
$\mathbf{x}_{i,k} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{i,k-1}^+, \mathbf{u}_{k-1})$	$\hat{\mathbf{P}}_{xy,k}^- = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} w_{ij}^{cc} \mathbf{x}_{i,k} \mathbf{y}_{j,k}^T$	$\mathbf{x}_{0,k}^{-/+} = \hat{\mathbf{x}}_k^{-/+}$
$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} w_i^m \mathbf{x}_{i,k}$	$\hat{\mathbf{P}}_{yy,k}^- = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} w_{ij}^c \mathbf{y}_{i,k} \mathbf{y}_{j,k}^T + \mathbf{W}_k$	$\mathbf{x}_{i,k}^{-/+} = \mathbf{x}_{0,k}^{-/+} + h \left(\sqrt{\hat{\mathbf{P}}_k^{-/+}} \right)_{1:n,i}$
$\hat{\mathbf{P}}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n} w_{ij}^c \mathbf{x}_{i,k} \mathbf{x}_{j,k}^T$	$\mathbf{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_{xy,k}^- \left(\hat{\mathbf{P}}_{yy,k}^- \right)^{-1}$	$\mathbf{x}_{i+n,k}^{-/+} = \mathbf{x}_{0,k}^{-/+} - h \left(\sqrt{\hat{\mathbf{P}}_k^{-/+}} \right)_{1:n,i}$ (2)
	$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{y}}_k)$	$(i = 1 \dots n)$
	$\hat{\mathbf{P}}_k^+ = \hat{\mathbf{P}}_k^- - \mathbf{K}_k \hat{\mathbf{P}}_{yy,k}^- \mathbf{K}_k^T$	

Mit $\mathbf{x}_{i,k}^{-/+}$ werden die sog. Sigmapunkte bezeichnet. Diese Punkte sind repräsentativ ausgewählte Stichproben im n -dimensionalen Zustandsraum, die so bestimmt werden, dass der Mittelwert der Verteilung von \mathbf{x}_k sowie die Zustandskovarianz \mathbf{P}_k bei Berechnung der mit w_i^m, w_i^c und w_{ij}^{cc} gewichteten Summen nachgebildet werden können. h ist ein Parameter, der die Verteilung der Sigmapunkte um den Kovarianzellipsoiden herum bestimmt. Zum Start des Filters ist somit die Kenntnis eines Anfangswertes $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ von \mathbf{x} sowie eine Schätzung von dessen Kovarianz, $\hat{\mathbf{P}}_0^+$, vonnöten (Größen mit einem '^' bezeichnen hier stets Schätzungen, während Größen ohne Dach die wahren Größen beschreiben). \mathbf{W}_k ist die Kovarianz des Messrauschens. Die Wurzel einer Matrix kann beispielsweise über die Cholesky-Zerlegung berechnet werden. Bei Betrachtung von (2) kann man eine deutliche Ähnlichkeit der SPKF zum EKF erkennen. Jedoch ist keine analytische Berechnung von Ableitungen der Funktionen \mathbf{f} und \mathbf{h} erforderlich. Dies hat weit reichende Konsequenzen: Zum einen vereinfacht es den Entwurf und die Implementierung des Filters; zum anderen wird es dadurch möglich, eine Zustandsschätzung von Systemen vorzunehmen, deren Systemfunktion zwar berechenbar ist, die dem Entwickler des Schätzers aber nicht analytisch bekannt sein muss – beispielsweise genügt es, die Software-schnittstelle einer proprietären Funktion zu kennen ohne Zugriff auf die Berechnungen zu

haben. Voraussetzung ist allerdings, dass sich die Funktion Taylor-entwickeln lässt, da sonst keine Aussagen über die Genauigkeit des Schätzverfahrens gemacht werden können. Trotz des Verzichts auf Ableitungen weisen SPKF im statistischen Mittel eine höhere Schätzgenauigkeit auf als EKF, was sowohl theoretisch als auch experimentell beweisbar ist [7]. Bei optimaler Implementierung sind die Rechenzeiten zwar durch die mehrfache Auswertung von f bzw. h etwas höher als beim EKF. Genau wie dieser haben SPKF aber die Komplexität $\mathcal{O}(n^3)$.

Bild 1 zeigt anschaulich die Vorgehensweise des Filters im zweidimensionalen Fall: Links zu sehen ist eine stochastische Verteilung des zweidimensionalen Zustands, der durch die nichtlineare Funktion f transformiert werden soll. Rechts ist die neue Verteilung (als Ergebnis einer Monte-Carlo-Analyse) zu sehen. In beiden Bildern sind Mittelwert und Varianz der jeweiligen Verteilung eingezeichnet. Zur Schätzung dieser beiden Größen der transformierten Verteilung wählt das SPKF fünf repräsentative Punkte im Zustandsraum und transformiert diese. Im Falle der Navigation eines Segelschiffes würde das bedeuten, dass fünf 'virtuelle' Schiffe von verschiedenen Koordinaten aus gestartet werden, wobei alle die gleichen Messungen von Geschwindigkeit und Kurs aufnehmen. Die fünf so ermittelten Endpositionen werden nun gewichtet summiert, um einen neuen Positionsschätzwert zu erhalten, und über eine gewichtete Stichprobenkovarianz wird eine Schätzung der Positionskovarianz errechnet. Im rechten Bild ist zu sehen, dass der so geschätzte Mittelwert (als Mittelpunkt der SPKF-Kovarianzellipse zu sehen) sehr gut mit dem tatsächlichen Mittelwert übereinstimmt, wohingegen der EKF-Schätzwert einen deutlichen Fehler aufweist. Auch die Kovarianzschätzung des SPKF ist erheblich besser als die des EKF – das EKF neigt dazu, die Zustandskovarianz zu unterschätzen, was im schlimmsten Fall zur Divergenz des Filters führen kann.

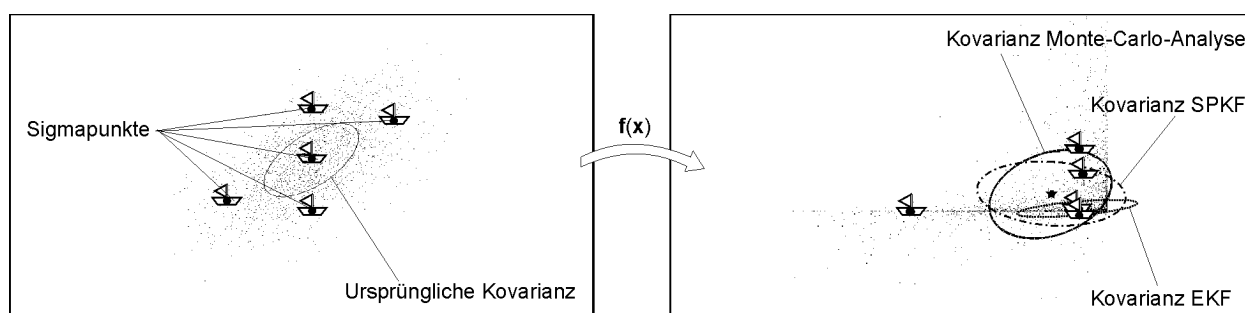


Bild 1: Stochastische Verteilung vor (links) und nach (rechts) einer nichtlinearen Transformation.

3. Simulationsbeispiele: Das "Columbusproblem"

Ein einfaches Modell der Navigation eines Schiffes benötigt zwei Zustände, nämlich Breitengrad φ (in nördlicher Richtung positiv definiert) und Längengrad λ (in östlicher Richtung positiv) zur Darstellung der Position. Die Eingangsgrößen des Systems sind dann die gemessene Geschwindigkeit v des Schiffes sowie der Kurswinkel α (d.h. die Himmelsrichtung, in die sich das Schiff bewegt), der auf dem Kompass abgelesen werden kann (Norden entspricht 0° , Westen

90° usw.). Es soll angenommen werden, dass der Kompass aufgrund eines Fertigungsfehlers einen konstanten Winkeloffset β hat. Der Erdradius wird mit r bezeichnet. Dann lässt sich das allgemeine Systemmodell (1) für das Columbusproblem wie folgt schreiben (Eulerapproximation mit der Schrittweite Δt):

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} &= \lambda_k - (v_k - n_k^v) \frac{\sin(\alpha_k - \beta_k - n_k^\alpha)}{r \cos \varphi_k} \Delta t_k \\ \varphi_{k+1} &= \varphi_k + (v_k - n_k^v) \frac{\cos(\alpha_k - \beta_k - n_k^\alpha)}{r} \Delta t_k \\ \beta_{k+1} &= \beta_k + n_k^\beta\end{aligned}\quad (3)$$

Das Systemrauschen $\mathbf{n}^s = (n^\alpha, n^v, n^\beta)^T$ beschreibt die stochastischen Fehler bei der Messung von Kurs und Geschwindigkeit. Das Element n^β kann dazu dienen, eine Parameteränderungsgeschwindigkeit bei der Schätzung von β einzustellen (siehe [2]).

Am Systemmodell (3) wird deutlich, dass aufgrund der Messfehler, die bei der Berechnung der Zustände mangels besseren Wissens zu null angenommen werden müssen, und des Fehlers, der durch die zeitdiskrete Systemdarstellung mit einfacher Eulerapproximation unumgänglich ist, die Schätzungen von Längen- und Breitengrad mit der Zeit schlechter werden – es fehlt eine absolute Messung. Solche Absolutmessungen sind heute beispielsweise durch das Global Positioning System (GPS) verfügbar. Früher behalf man sich mit der Messung des Breitengrades durch die Bestimmung der Elevation eines Sterns. Die (lineare) Messgleichung des Columbusproblems lässt sich daher als $y_k = \varphi_k + n_k^\varphi$ schreiben.

In Bild 2 ist zu sehen, wie sich die Verwendung eines Schätzfilters auf die Positionsbestimmung auswirken kann. Eine (fiktive) Reise um Südamerika wurde als tatsächliche Trajektorie vorgegeben, wobei alle vier Stunden Geschwindigkeit und Kurs gemessen wurden sowie einmal täglich der Breitengrad. Die Standardabweichungen von Geschwindigkeit, Kurs und Breitengrad betragen 2 Knoten, 2° und 2°, der (als unbekannt angenommene) Offset des Kompasses 20°. Die reine Integration von v und α führt aufgrund des Kompassfehlers zu einer stark verkippten Bahn. Werden Länge und Breite (aber nicht der Kompassoffset) vom SPKF geschätzt, führen die zusätzlichen Messungen des Breitengrades zu einer deutlichen Verbesserung der Trajektorie. Erst aber wenn auch der Kompassfehler β in den Zustand aufgenommen wird, erhält man eine gute Schätzung des tatsächlichen Reisewegs und zudem, wie in den Bildern 4 und 5 zu sehen ist, auch eine Schätzung des Kompassfehlers (man beachte, dass der Längengrad nicht gemessen wird und dennoch mit guter Genauigkeit geschätzt werden kann!). In diesem Simulationsbeispiel sind – im Gegensatz zu Bild 1 – die Genauigkeitsunterschiede zwischen EKF und SPKF nur geringfügig. Die höhere Schätzgenauigkeit des SPKF wird jedoch deutlich, wenn man statt des Breitengrades die Länge a eines Jakobsstabs (siehe Bild 3) misst, der zu Columbus' Zeiten (wenn auch höchstwahrscheinlich nicht von Columbus selbst) zur Breitenbestimmung verwendet wurde. Dann lautet die Messgleichung



Bild 2: Wahre und geschätzte Trajektorien

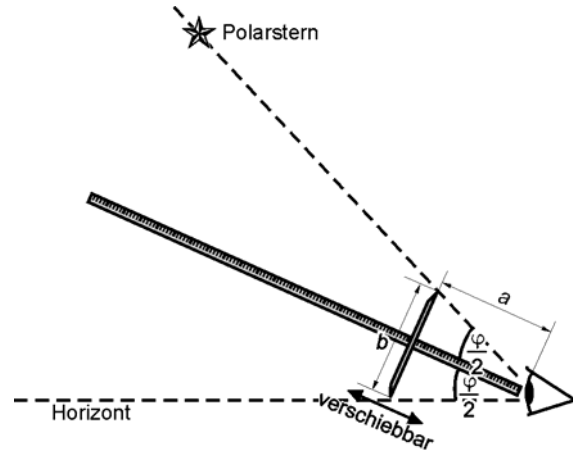


Bild 3: Jakobsstab

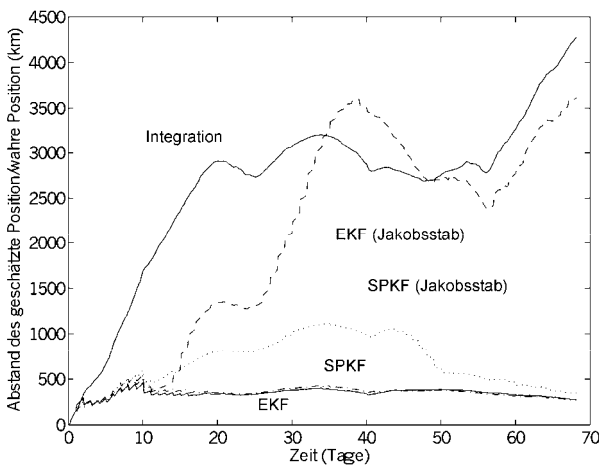


Bild 4: Abstand wahre/geschätzte Position (100 Durchläufe, quadr. Mittelwert)

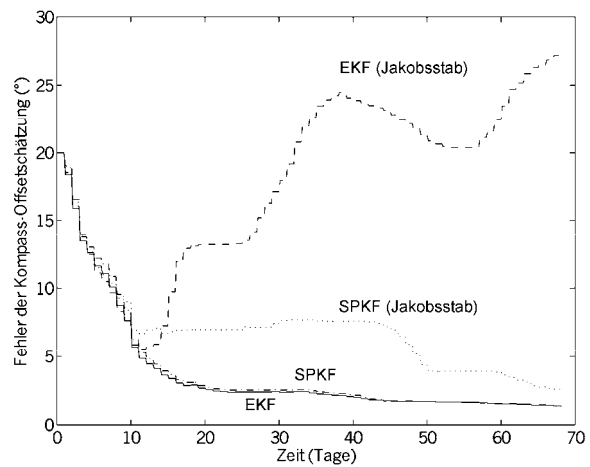


Bild 5: Kompass-Offsetschätzfehler (100 Durchläufe, quadr. Mittelwert)

$$y_k = \frac{b}{2 \tan(\varphi_k / 2)} \quad (4)$$

Diese Gleichung hat eine Singularität im Äquator ($\varphi_k = 0$). Daher wurden in der Simulation in der Nähe des Äquators (von 5° südlicher bis 5° nördlicher Breite) keine Updates erzeugt. Die Bilder 4 und 5 zeigen, dass nun das SPKF dem EKF in der Schätzgenauigkeit deutlich überlegen ist. Generell lässt sich sagen: je nichtlinearer das Modell, desto größer ist der Genauigkeitsgewinn bei Verwendung eines SPKF.

4. Technische Anwendung: Kalibrierung eines Inertialmesssystems

Das "Columbusproblem" ist eher theoretischer Natur und eignet sich aufgrund seiner Einfachheit dazu, die Grundlagen der stochastischen Zustands- und Parameterschätzung anschaulich zu machen, beispielsweise beim Einsatz in der Lehre. Jedoch gibt es auch ein erhebliches Anwendungspotenzial für SPKF in realen technischen Problemen. Prinzipiell lassen sich SPKF überall dort einsetzen, wo EKF verwendet werden – einzig die etwas längere Rechenzeit muss

beachtet werden. Aufgrund ihrer höheren Genauigkeit und des einfacheren Entwurfs haben SPKF das Potenzial, EKF in vielen Bereichen zu verdrängen.

Am Lehrstuhl für Prozessautomatisierung der Universität des Saarlandes werden SPKF dazu genutzt, ein inertiales Messsystem (IMS), bestehend aus drei Beschleunigungs- und drei Drehratensensoren, zu kalibrieren [2,3]. Dabei wird das IMS von einem Industrieroboter bewegt. Aufgrund der Bahn- und Positionierungsfehler des Roboters können die Verfahrenswege nicht als bekannt vorausgesetzt werden, sondern müssen mit stochastischen Fehlern modelliert werden. Dadurch entsteht bei der Kalibrierung die Aufgabe, gleichzeitig die Zustände (Position, Geschwindigkeit und Orientierung des IMS) sowie die Parameter des Sensormodells (nichtlineare Kennlinien, Montagefehler, Exzentrizitäten der Beschleunigungssensoren usw.) zu schätzen. Die (nur ungenau bekannten) Roboterposen dienen dabei als Updatemessungen, während die vom IMS gemessenen Beschleunigungen und Drehraten die Eingangsgrößen \mathbf{u} darstellen. Die Systemfunktion \mathbf{f} beschreibt die Navigationsalgorithmen, d.h. die Berechnung von Position, Geschwindigkeit und Orientierung abhängig von gemessenen Beschleunigungen und Drehraten. Insgesamt werden bei dieser Anwendung zehn Zustände und mindestens 33 Parameter des Systems geschätzt. Somit sind für Kalibrierung $2 \cdot (33 + 10) + 1 = 87$ Sigmapunkte vonnöten, d.h. die Navigationsalgorithmen müssen in jedem Zeitschritt ebenso oft berechnet werden. Daher wird hier z.Z. nur eine Offline-Kalibrierung durchgeführt. Jedoch lassen sich die SPKF auch für die eigentlichen Navigationsaufgaben eines IMS einsetzen, d.h. zur Fusion von Inertialmessungen und Stützinformationen von GPS oder Odometrie. Hier sind die Systemordnungen wesentlich kleiner, so dass die Onlinefähigkeit schneller erreicht werden kann.

Die Ergebnisse der Arbeiten zeigen, dass eine solche Kalibrierung von IMS möglich ist: Bei passender Wahl der Systemstruktur, einer geeigneten Auswahl von Roboterbahnen (die eine Anregung aller Kalibrierparameter garantieren müssen) und korrekter Initialisierung der Kovarianzmatrizen lässt sich eine schnelle Konvergenz der Parameter zu ihren wahren Werten erreichen, so dass das IMS nur wenige Minuten lang vom Roboter bewegt werden muss. Simulationen ergaben, dass der Einsatz von SPKF anstelle von EKF für diese Aufgabe in einer deutlich verbesserten Genauigkeit resultiert, weshalb ein SPKF-basierter Schätzalgorithmus am realen System implementiert wurde. Zudem wird mit den SPKF auch eine sog. Rare-Update-Schätzung möglich [3], die nur wenige Messungen der Roboterposition erfordert. Die erreichbaren Genauigkeiten genügen bisher für IMS geringer und mittlerer Güte.

Ein solches Verfahren bringt Kostenvorteile mit sich, da bisher teure Präzisionsdrehtische eingesetzt werden müssen, um IMS zu kalibrieren, während künftig ein Standard-Industrieroboter (mit entsprechender Software) ausreichen wird. Zudem lässt sich ein roboterbasiertes Verfahren leichter in eine Produktionslinie integrieren und bietet zudem die Möglichkeit, das IMS mit Bewegungen zu testen, die dem späteren tatsächlichen Einsatz näher kommen, als dies die Bewegungen auf Rotations- oder Schütteltischen tun.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde erläutert, wie Sigmapunktfilter zur Zustands- und Parameterschätzung nichtlinearer dynamischer Systeme eingesetzt werden können. Am Beispiel des "Columbus-problems" sowie der Kalibrierung einer Inertialmesseinheit zeigte sich, dass ein SPKF im stochastischen Mittel zumindest gleichwertige, wenn nicht bessere Schätzergebnisse liefert als ein erweitertes Kalmanfilter. Die höhere Schätzgenauigkeit in Kombination mit der Eignung des SPKF für Black-Box-Probleme eröffnet dem SPKF das Potenzial, in praktisch allen klassischen Gebieten, in denen das erweiterte Kalmanfilter eingesetzt wird, dieses zu verdrängen.

Verschiedene Probleme im Zusammenhang mit SPKF bieten noch Forschungspotenzial: Beispielsweise bleibt zu untersuchen, wie sich Beschränkungen der Zustände (Gleichungs- oder Ungleichungsnebenbedingungen) in die Schätzung mit einbeziehen lassen. Interessant ist darüber hinaus die Frage, ob die SPKF auch bei nicht Taylor-entwickelbaren Funktionen (bspw. nichtdifferenzierbare Teilräume des Zustandsraums) eingesetzt werden können. Verschiedene Autoren berichten von erfolgreichen Simulationen auf diesem Gebiet, jedoch fehlt bisher eine theoretische Grundlagenuntersuchung.

Literatur:

- [1] K. Brinkbäumer; C. Höges: *Die letzte Reise*. DVA, Spiegel-Buchverlag, München, 2004.
- [2] J. Fox; H. Janocha: *A Rare-Update Sigma-Point Kalman Filter as Parameter Estimator*. In: Proceedings of the IASTED Conference on Modelling, Identification, and Control, Innsbruck, Österreich, 16.-18. Februar 2005, S. 190-195.
- [3] J. Fox; H. Janocha: *Der Industrieroboter als Referenz: Statische Kalibrierung von Inertialmesssystemen*. In: Robotik 2004, München. VDI-Berichte 1841, S. 187-194.
- [4] U. Franke: *Gut gemessen ist halb geregelt - Robuste Bildverarbeitung für zukünftige Fahrerassistenzsysteme*. In: Sensoren und Messsysteme 2004, Ludwigsburg. VDI-Berichte 1829, S. 325-332.
- [5] M. S. Grewal; A. P. Andrews: *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [6] S. J. Julier; J. K. Uhlmann: *Unscented Filtering and Nonlinear Estimation*. In: Proceedings of the IEEE 3 (92) 2004, S. 401-421.
- [7] R. v. d. Merwe: *Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models*. Dissertation, Oregon Health & Science University, Portland, USA, 2004.
- [8] S. C. Stubberud; K. A. Kramer: *Predictive and Prognosticative Tracking for Intercept Control*. In: Proceedings of the IASTED Conference on Modelling, Identification, and Control, Innsbruck, Österreich, 16.-18. Februar 2005, S. 121-126.
- [9] W. Weber; L. Weinheimer: *Adaptiver Kalman-Filter zur Ermittlung der Gelenkmesswerte*. In: Robotik 2004, München. VDI-Berichte 1841, S. 535-542.